INSTITUT DE STATISTIQUE
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

CONCOURS D'ENTRÉE JUIN 2006

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

3 heures

Les calculatrices NE sont PAS autorisées

Nous considérons le problème suivant : Trouver $X \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$AX = b, \tag{I}$$

où A est une matrice réelle inversible de taille $n \times n$ et $b \in \mathbb{R}^n$ un vecteur donné. L'espace $\mathbb{R}^n$ est, *dans toute la suite*, muni de sa norme euclidienne canonique. Les premiers algorithmes qui viennent à l'esprit sont ceux de Cramer et du pivot de Gauss. Bien que ces méthodes soient exactes, les erreurs d'arrondi par exemple peuvent perturber les coefficients de la matrice ou du second membre. On résout donc un système de la forme

$$(A + \delta A)\, V = b + \delta b, \tag{II}$$

où $(A + \delta A)$ est une matrice réelle inversible de taille $n \times n$ et $\delta b \in \mathbb{R}^n$ un vecteur donné. Ils représentent les perturbations. L'exemple du système suivant est assez parlant.

I. PRÉLIMINAIRES

I. a) On cherche la solution du système $AX = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \\ 8 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 19 \\ 11 \\ 14 \\ 14 \end{pmatrix} \tag{III}$$

I. a) 1- Montrer que la matrice A est inversible.

I. a) 2- Donner la solution de (III).

I. b) Si l'on perturbe le vecteur b : $\quad b + \delta b = \begin{pmatrix} 19,01 \\ 11,05 \\ 14,97 \\ 14,05 \end{pmatrix}$

vérifier qu'une solution approchée à 10^{-2} près s'écrit : $\quad Y = \begin{pmatrix} -2,34 \\ 9,745 \\ -4,85 \\ -1,34 \end{pmatrix}$

I. c) Calculer la partie entière de l'erreur relative sur la solution (mesurée en norme euclidienne)

$$\frac{\|X - Y\|}{\|X\|}$$

I. d) Si l'on perturbe la matrice A (on admet que $A + \delta A$ reste inversible) :

$A + \delta A = \begin{pmatrix} 8 & 6,01 & 4 & 1 \\ 1 & 4,05 & 5 & 1 \\ 8,03 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 6,07 \end{pmatrix}$ une solution approchée à 10^{-2} près s'écrit : $Z = \begin{pmatrix} 1,69 \\ -0,82 \\ 2,23 \\ 1,46 \end{pmatrix}$

En quoi un phénomène analogue à celui du I. c) se produit-il ?

II. ESTIMATION DE L'ERREUR

On veut connaître une majoration de l'erreur que l'on commet par rapport à X solution du système $AX = b$, c'est-à-dire l'amplitude de l'erreur δX définie par : $V = X + \delta X$.

Pour cela, pour toute matrice réelle carrée d'ordre n, nous introduisons la norme :

$$\|A\| = \sup_{X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|} \qquad \textbf{(IV)}$$

II. a) Montrer que :

$$A \mapsto \|A\|$$

est une norme sur l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices réelles carrés d'ordre n.

II. b) Montrer que, pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$,

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \ \|B\|$$

II. c) Soit A une matrice inversible et b un vecteur non nul.

Montrer que, si X et $Y = X + \delta X$ sont les solutions respectives des systèmes

$$AX = b \quad \text{et} \quad AY = b + \delta b,$$

alors

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leqslant \|A\| \ \left\|A^{-1}\right\| \ \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \qquad \textbf{(V)}$$

II. d) Soit toujours A une matrice inversible et b un vecteur non nul.

Montrer que, si X et $Z = X + \delta X$ sont les solutions respectives des systèmes

$$AX = b \quad \text{et} \quad (A + \delta A)\, Z = b,$$

alors

$$\frac{\|\delta X\|}{\|Z\|} \leqslant \|A\| \ \left\|A^{-1}\right\| \ \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \qquad \textbf{(VI)}$$

III. ÉTUDE DU CONDITIONNEMENT

Soit toujours A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, inversible, $\|A\| \times \left\|A^{-1}\right\|$ est appelé *conditionnement* de la matrice et noté $cond\,(A)$. La partie II a permie de démonter que les perturbations sur la solution sont majorées par les erreurs sur les données, multipliées par le conditionnement. Même si la perturbation est faible, l'erreur sur la solution peut être importante si $cond\,(A)$ est grand.

III. a) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, inversible, diagonalisable, de valeurs propres $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.
Calculer $\|A\|$, A^{-1}, $\left\|A^{-1}\right\|$ et $cond\,(A)$ en fonction des λ_i.

III. b) Donner le plus grand minorant de $cond\,(A)$, si A décrit toutes les matrices inversibles.

III. c) Lorsque l'on a un système linéaire mal conditionné à résoudre, on a tout intérêt à utiliser un pré-conditionneur, c'est-à-dire une matrice C inversible telle que $cond\,(CA)$ soit « très petit » par rapport à $cond\,(A)$. Montrer que le choix optimal de la matrice C est théoriquement $C = A^{-1}$. À quelle difficulté pratique est-on alors confronté ?

Nous allons voir la partie suivante l'influence d'un mauvais conditionnement de matrice dans la résolution d'une équation différentielle.

IV. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

On s'intéresse à la résolution d'un problème différentiel :

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$, on veut trouver une fonction U, définie sur $[0, 1]$, de classe C^2 telle que :

$$U''(x) = f(x), \quad x \in \,]0, 1[\qquad \textbf{(VII)}$$

et vérifiant les conditions aux limites : $U(0) = 1$ et $U(1) = 0$. **(VIII)**

La méthode consiste dans un premier temps à « segmenter » l'intervalle $[0, 1]$ en $N + 1$ points :

$$X_i = ih,\ i = 0, 1, 2, \ldots, N \text{ avec } h = \frac{1}{N}$$

puis à calculer une approximation de la valeur de U au point X_i, $U(X_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, N)$, approximation que l'on notera U_i, $(i = 0, 1, \ldots, N)$.

IV. a) Montrer que l'équation différentielle (VII - VIII) admet une unique solution.

IV. b) On considère la fonction : $f(x) = +2\pi \sin(\pi x) - \pi^2(1-x)\cos(\pi x)$ **(IX)**
Résoudre l'équation différentielle (VII - VIII - IX).

IV. c) Montrer que

$$U''(X_i) = \frac{U(X_{i+1}) - 2U(X_i) + U(X_{i-1})}{h^2} + o\left(h^2\right),\ i = 1, 2, \ldots, N-1$$

où $o\left(h^2\right)$ est une fonction de h qui vérifie : $\dfrac{o\left(h^2\right)}{h^2} \to 0$ lorsque $h \to 0$.

IV. d) Les valeurs U_i sont obtenues en résolvant un système linéaire tridiagonal :

$$\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} = f(X_i),\ i = 1, 2, \ldots, N-1$$

avec $\qquad U_0 = 1 \quad$ et $\quad U_N = 0$.

Écrire ce système sous la forme : $A_N \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{N-2} \\ U_{N-1} \end{pmatrix} = b_N$, en explicitant A_N et b_N.

IV. e) Reprenant la fonction : $f(x) = +2\pi \sin(\pi x) - \pi^2(1-x)\cos(\pi x)$ (IX)
calculer U_3 et $cond\,(A_3)$.

IV. f) Munissant $\mathbb{R}^N$ de la norme euclidienne, évaluer, à 10^{-1} près, l'erreur :

$$\left\|(U(X_i) - U_i)_{0 \leqslant i \leqslant 3}\right\|.$$